2. Sonnensystem

2.1 Aufbau des Sonnensystems

Abfolge der Planeten

Die Abfolge der Planteten ist hinlänglich bekannt und lässt sich mit Merksätzen wie „Mein Vater erklärt mir jeden Sonntag unseren Nachthimmel" behalten. Pluto zählt in der aktuellen Sichtweise nicht mehr als Planet, sondern als Exoplanet.

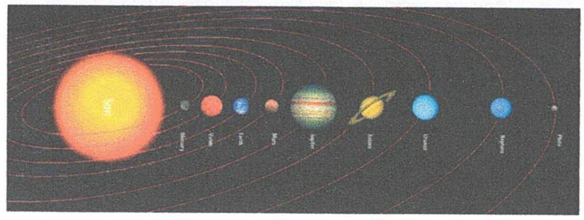
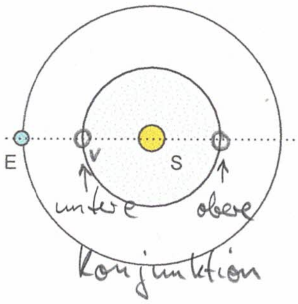


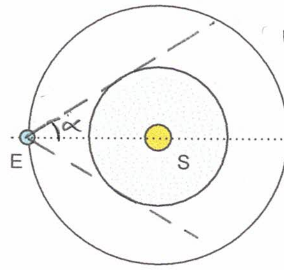
Abb. aus geo.de

Merkur - Venus - Erde - Mars - Jupiter - Saturn - Uranus - Neptun

Aspekte (Stellungen) der Planeten

innere Planeten:

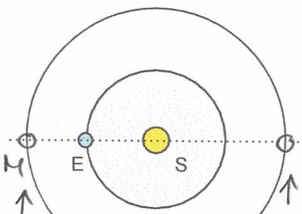




maximale Elongation (Auslenkung)
↓
Winkel zwischen Sonne und Planet

Bei der gemeinsamen Umrundung der Sonne treten bezogen auf die Beobachtung von der Erde aus besondere Planetenkonstellationen auf, die wir z.B. für die genaue Vermessung der Planetenbahnen nutzen. ***Erläutere die Unterschiede zwischen inneren und äußeren Planeten hierbei.***

äußere Planeten:



ein innerer Planet kann nie in Opposition zur Sonne stehen, für einen äußeren Planeten gibt es nur eine Konjunktion

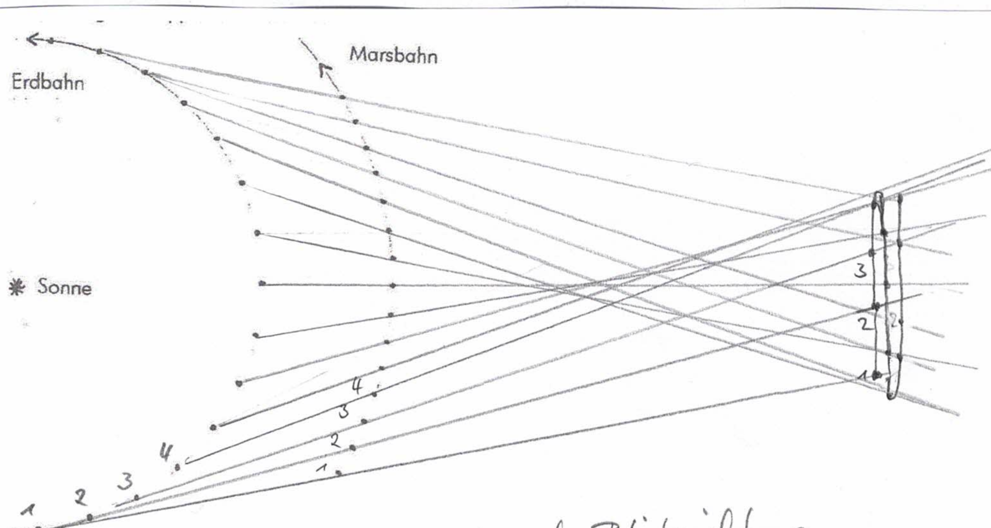
es geht immer um den Zusammenhang Sonne - Planet von der Erde aus gesehen

Oppositionsschleifen - die merkwürdige Bewegung der Planeten

Während die Sterne ihre Positionen innerhalb der Sternbilder unverändert einhalten (auch wenn sich der Sternhimmel als Ganzes bewegt), laufen die Planeten über längere Zeit (Monate) von der Erde aus betrachtet zwischen den Sternen hin- und her (siehe Graphik und Animation). Diese Beobachtung führte im Altertum zur Bezeichnung "Wandelsterne" = planetes. ***Wie diese merkwürdigen Schleifenbahnen zustande kommen, ermitteln wir hier in einer Zeichnung. Der Hauptgrund liegt in der unterschiedlichen Umlaufgeschwindigkeit der Planeten (je weiter außen, desto langsamer).*** *Das zeichnerische Vorgehen ist unter dem Link oben auch noch animiert.*

Abb. aus leifiphysik.de

Eine schöne Animation hierzu gibt's auf Leifiphysik, Suchbegriff „Schleifenbahnen".



„Blickrichtung von der Erde aus"

je nach Blickrichtung

Die Frage nach der Umlaufdauer eines Planeten erscheint zunächst total simpel, erweist sich aber hinsichtlich der Messung als ziemlich knifflig. Dies führt zur Unterscheidung der Begriffe "siderische" und "synodische" Umlaufdauer.

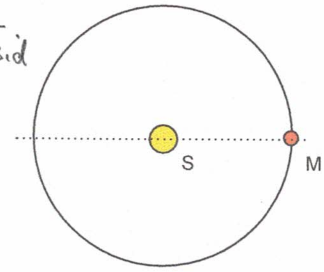
Animation auf Leifiphysik, Suchbegriff „siderische Umlaufdauer".

Erläutere, weshalb sich die siderische Umlaufdauer nicht einfach messen lässt.
Stelle einen Zusammenhang zwischen der synodischen und siderischen Umlaufdauer her:
a) Betrachte zwei aufeinanderfolgende Oppositionen des Mars.
b) Vergleiche die zurückgelegten Winkel.
c) Berechne die Winkel mit Winkelgeschwindigkeiten.
d) Stelle die Winkelgeschwindigkeiten mit Hilfe der Umlaufdauern dar.

Siderische und synodische Umlaufdauer von Planeten

Die **siderische** Umlaufdauer bezeichnet die Zeit, die ein Planet für eine **vollständige Umrundung der Sonne** benötigt.

T_{sid}



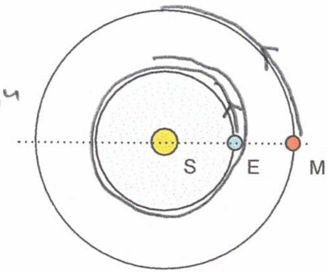
Problem bei der Bestimmung:

Wir sehen nicht von außen auf das System, sondern sind im System und bewegen uns dabei.

Konzept zur Messung:

Die **synodische** Umlaufdauer bezeichnet die Zeit zwischen **zwei aufeinanderfolgenden gleichen Aspekten** des Planeten, z.B. zwei Oppositionsstellungen.

T_{syn}



$$\varphi_E = \varphi_M + 2\pi$$

$$\omega_E \cdot T_{syn} = \omega_M \cdot T_{syn} + 2\pi$$

da $\omega = \frac{2\pi}{t}$, gleiche Zeit T_{syn} für beide Planeten

$$\frac{2\pi}{T_E} \cdot T_{syn} = \frac{2\pi}{T_{sid}} \cdot T_{syn} + 2\pi \quad |:T_{syn} \quad |:2\pi$$

$$\frac{1}{T_E} = \frac{1}{T_{sid}} + \frac{1}{T_{syn}}$$

$$\boxed{\frac{1}{T_{sid}} = \frac{1}{T_E} \mp \frac{1}{T_{syn}}}$$

äußere Planeten: „−"

innere Planeten: „+"

Für den Planet Mars misst man eine Zeitspanne von 780 d zwischen zwei aufeinanderfolgenden Oppositionsstellungen. Berechne damit die siderische Umlaufzeit von Mars.

Übungsaufgabe:

$$\frac{1}{T_{sid}} = \frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_{syn}}$$

$$\frac{1}{T_{sid}} = \frac{1}{365\,d} - \frac{1}{780\,d} = 1{,}46 \cdot 10^{-3}$$

$$\rightarrow T_{sid} = 686\,d \overset{:360}{=} 1{,}88\,a$$

Verwende dabei die Taste $\boxed{x^{-1}}$ am TR!

Selbst-Check:
- Sonnensystem
- Aspekte von Planeten
- Schleifenbahnen
- siderische und synodische Umlaufdauer

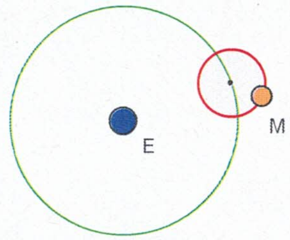
Aufgabe:

Zum Thema passen mehrere Fragen aus diesem Leifitest "Umlaufzeiten von Planeten". Du findest ihn auf der Leifiseite mit dem Suchbegriff "Quiz Umlaufzeiten".

Die im letzten Kapitel beschriebene Schleifenbahn der Planeten macht die Bahnbeschreibung im geozentrischen Weltbild relativ kompliziert (siehe Bild). Animation auf Leifiphysik, Suchbegriff „schleifenbahnen epizyklen“.

2.2 Die Kepler-Gesetze

Bahnbeschreibung mit Epizykeln



Um die komplizierten Schleifenbahnen in einem mathematischen Modell beschreiben zu können, verwendete man im geozentrischen System eine Kombination von zwei Kreisen, wobei der kleinere auf dem Umfang des größeren entlang läuft

Die "Ungenauigkeit" der Planetenbahnen

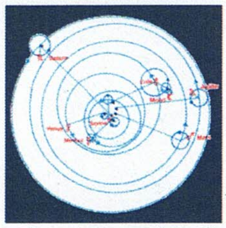
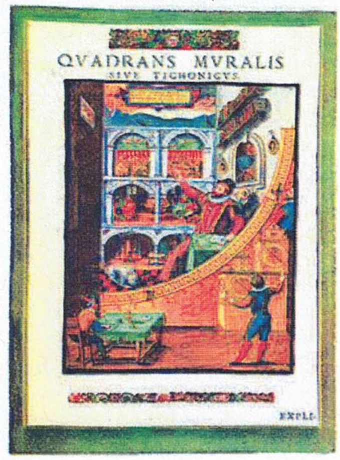


Abb. aus kepler-gesellschaft.de

Auch Kopernikus benötigte in seinem heliozentrischen Modell Epizykeln, da die Planetenbahnen nicht genau kreisförmig sind. Deshalb fand dieses Weltbild auch in der Wissenschaft wenig Freunde.

Im heliozentrischen Weltbild sollte die Notwendigkeit für Epizykeln entfallen (das liest man auch häufig), tatsächlich war das für Kopernikus nicht der Fall. Die mathematische Beschreibung blieb weiterhin kompliziert.

Abb. aus wikipedia.de



Die Vermessung durch Tycho Brahe

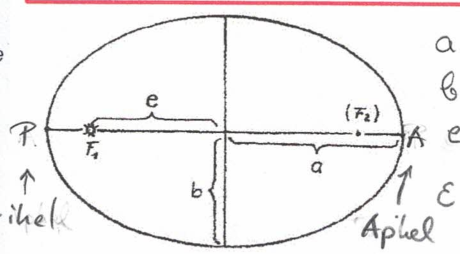
Der Däne Tycho Brahe revolutionierte die Genauigkeit astronomischer Positionsmessungen, in dem er animiert durch den Augsburger Paul Hainzel zur Bestimmung der Winkel nicht mehr kleine Metallskalen, sondern eine große, gemauerte Skala (Mauerquadrant) verwendete.

Die Messgenauigkeit war von den Ägyptern bis in die Mitte des 16. Jahrhunderts praktisch unverändert geblieben.

Auf der Basis der genaueren Daten von Tycho Brahe gelang Johannes Kepler der entscheidende Schritt: die Abkehr vom der "göttlichen" Kreisform und die Nutzung der mathematischen Ellipse zur Beschreibung der Planetenbahn. Diese passte exakt zu den Beobachtungsdaten und machte die komplizierten Epizykelsysteme unnötig.
Alle drei Keplergesetze sind animiert auf Leifiphysik: Teilgebiet Astronomie – Planetensystem.

Die 3 Gesetze von Kepler

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne.
Dabei steht die Sonne in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse.



a große Halbachse der Ellipse
b kleine Halbachse "
e lineare Exzentrizität "
$\varepsilon = \frac{e}{a}$ numerische Exzentrizität "
(in Prozent; $\varepsilon = 0 \rightarrow$ Kreis)

$$\left.\begin{array}{l} r_A = a - e \\ r_P = a + e \end{array}\right\} \text{Mittelwert } \frac{r_A + r_P}{2} = \frac{a - e + a + e}{2} = a$$

ein Planet $\longrightarrow$

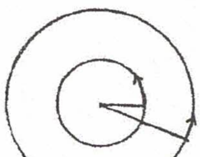
Der Fahrstrahl Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

nahe der Sonne schneller

Beachte:

Die Gesetze gelten jeweils für **alle Körper, die dasselbe Zentralgestirn** (z.B. die Sonne) umrunden, also auch Raumsonden oder Kometen.

Die Quadrate **der Umlaufzeiten** zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen **der großen Halbachsen** der Ellipsen.



$$\frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \frac{a_1^{\,3}}{a_2^{\,3}}$$

äußerer Planet braucht länger für Umrundung (aber nicht proportional

Seit 240 v.Chr. wurden Sichtungen des Kometen dokumentiert, der bei Annäherung an die Erde mit bloßem Auge beobachtet werden kann. Eine Begegnung fällt in die Lebenszeit des Malers Giotto, der die typische Kometenform 1306 in seinem berühmten Bild "Anbetung der Könige über dem Stall von Bethlehem dargestellt hat.

Halley umläuft die Sonne auf einer stark elliptischen Bahn mit einer Umlaufdauer von 76,1 a und erreicht dabei einen maximalen Abstand von der Sonne von 35,4 AE.

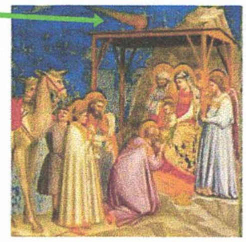
a) Berechne die große Halbachse seiner Bahn.

b) Stelle seine Bahn maßstabsgetreu in einer Zeichnung dar.

c) Berechne den kleinsten Abstand von der Sonne.

d) Beurteile unter Berücksichtigung der Ergebnisse, ob Halley eine Gefahr für die Erde darstellen könnte.

Musteraufgabe: Komet Halley



a) $\frac{T_H^2}{T_E^2} = \frac{a_H^3}{a_E^3}$

$a_H^3 = a_E^3 \cdot \left(\frac{T_H}{T_E}\right)^2$

$a_H = a_E \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_H}{T_E}\right)^2} = 1\,AE \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{76{,}1a}{1a}\right)^2} = \underline{\underline{18\,AE}}$

b)

c) $r_P = 2a - r_A = 36\,AE - 35{,}4\,AE = 0{,}6\,AE < 1\,AE!$

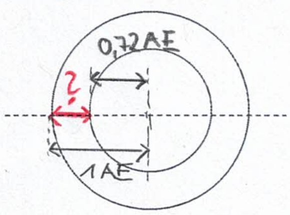
d) Halley kommt der Sonne näher als der Erdbahnradius, könnte also die Erdbahn kreuzen. In Sonnennähe ist er dabei besonders schnell (Kepler 2).

Für den zeitlichen Abstand zwischen zwei unteren Venus-Konjunktionen (mit der Sonne) bestimmt man 586 d.

a) Berechne die siderische Umlaufdauer der Venus.

b) Berechne den mittleren Abstand Venus-Sonne (= Länge der großen Halbachse).

c) In der unteren Konjunktion benötigt das Echo eines Radarsignals, das von der Erde ausgesandt wird, etwa 276 s bis zur Rückkehr zur Erde. Bestimme daraus den Wert für die astronomische Einheit AE.



Übungsaufgabe: Bestimmung der astronomischen Einheit

a) $\frac{1}{T_{sid}} = \frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{365d} + \frac{1}{586d} = 4{,}45 \cdot 10^{-3}$

$\xrightarrow{x^{-1}} T_{sid} = \underline{\underline{225\,d}}$

b) $\frac{T_V^2}{T_E^2} = \frac{a_V^3}{a_E^3} \rightarrow a_V = a_E \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_V}{T_E}\right)^2} = 1\,AE \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{225d}{365d}\right)^2}$

$= \underline{\underline{0{,}72\,AE}}$

c) $s = 2 \cdot (1\,AE - 0{,}72\,AE) = 2 \cdot 0{,}28\,AE = \underline{0{,}56\,AE}$

$s = v \cdot t = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 276\,s = \underline{8{,}28 \cdot 10^{10}\,m}$

$0{,}56\,AE = 8{,}28 \cdot 10^{10}\,m \quad | : 0{,}56 \quad \rightarrow 1\,AE = 1{,}48 \cdot 10^{11}\,m$

Selbst-Check:

- Planetenbahnen und Epizykel
- Ellipsenbahn
- Flächensatz
- Abstandsberechnung

Aufgaben:

Hier passt perfekt der Leifitest zu den Keplerschen Gesetzen. Suchbegriff auf Leifiphysik: „quiz kepler".

Wenn die Erde das Zentralgestirn darstellt, lässt sich das 3. Keplergesetz entsprechend verwenden, darum geht es in der Leifiaufgabe „Umlaufdauer eines Satelliten". Suchbegriff auf Leifiphysik: „umlaufdauer satellit".

Es ist ganz typisch für die Naturwissenschaft, dass Phänomene zuerst beschrieben und später erklärt werden. Erst ca.1600 gelang Galilei die korrekte Beschreibung von Wurfbewegungen, bis zu deren Erklärung dauerte es weitere 70 Jahre.

2.3 Gravitationsgesetz

Entwicklung der Mechanik

Kinematik:

mathematische Beschreibung .... von Bewegungsbahnen

auf der Erde: Parabelbahn beim Wurf .... (Galilei)

am Himmel: Ellipsenbahn von Planeten .... (Kepler)

Dynamik:

physikalische Begründung .... von Bewegungsbahnen

auf der Erde: 3 Gesetze der Bewegung .... (Newton)

am Himmel: 3 Gesetze + Gravitationsgesetz .... (Newton)

Newton und der Apfel

Dass Newton die zündende Idee hatte, als ihm ein Apfel auf den Kopf fiel, gehört wohl ins Reich der Legende. Die Anekdote zeigt aber genau den Knackpunkt dieser Entwicklung: **Newton wendet seine Gesetze für irdische Bewegungen auf die Himmelsmechanik an.**

aus dem Wechselwirkungsprinzip folgert Newton, dass der Apfel die Erde ebenso anzieht wie die Erde den Apfel, das überträgt er auf das System Erde-Mond bzw. Sonne-Erde

Newton's Gravitationsgesetz

Die Herleitung dieses Gesetzes verläuft analog zu der für das Coulombgesetz in der 11. Jgst. (siehe dort Kap. 1.4).

$$\boxed{F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

m: Massen

r: Abstand der Mittelpunkte

G: universelle Gravitationskonstante $6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$

Anwendung: Erdanziehung auf eine Person auf der Oberfläche

Zunächst probieren wir die Formel gleich mal in einem naheliegenden Beispiel aus:
Bestimme die Gravitationskraft auf eine Person (m = 50 kg) auf der Erdoberfläche und vergleiche.

$$F_G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot \frac{50\,kg \cdot 6 \cdot 10^{24}\,kg}{(6{,}371 \cdot 10^6\,m)^2} = 493 \frac{kg\, m}{s^2} = 493\,N$$

früher: $F_G = m \cdot g = 50\,kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 491\,N$ < gleich

Bestimmung der Sonnenmasse

In ihrer Grundform werden wir diese Formel nur selten benutzen, da die Massen der Himmelskörper zunächst mal nicht bekannt sind. Im Umkehrschluss ermöglicht uns die Formel aber gerade diese unbekannten Massen zu bestimmen.
Bestimme die Masse unserer Sonne aus dem Erdumlauf.

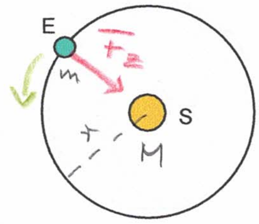
$$F_Z = F_G$$

$$\cancel{m_E}\,\omega^2 r = G \cdot \frac{\cancel{m_E} \cdot m_S}{r^2}$$ unabhängig von Erdmasse!

$$m_S = \frac{\omega^2 r^3}{G}$$

$$m_S = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{r^3}{G} = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}49 \cdot 10^{11}\,m)^3}{(365 \cdot 24 \cdot 3600\,s)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,m^3}\,kg\,s^2$$

$$= 1{,}97 \cdot 10^{30} = m_S$$

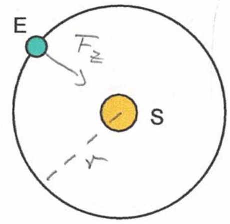


Um die Masse eines Himmelskörpers zu bestimmen, benötigen wir einen zweiten .... Körper, der den ersten .... umkreist. Aus der Gleichheit von Zentripetalkraft .... und Gravitationskraft .... ergibt sich die **Masse des Zentralgestirns**, die Masse des zweiten Körpers, fliegt bei der Rechnung raus.

Beachte: *Dieses Konzept gilt in der vereinfachenden Betrachtung, dass das Zentralgestirn quasi ruht, während der zweite Körper umläuft. Sofern der zweite Körper viel leichter ist, geht das näherungsweise in Ordnung.*

Nachdem Kepler mit seinen Gesetzen "nur" die Bewegung der Planeten beschrieben hatte, gelang es Newton, das dritte Kepler-Gesetz physikalisch zu begründen.
Ermittle aus der Kräftebetrachtung des vorherigen Beispiels eine andere Darstellung des Terms T^2/r^3 aus dem dritten Kepler-Gesetz.

Newton und Kepler: Das allgemeine Kepler-Gesetz



$$F_Z = F_G$$

$$\cancel{m_E}\,\omega^2 r = G \cdot \frac{\cancel{m_E} \cdot m_S}{r^2} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = G \cdot \frac{m_S}{r^2} \qquad | \cdot T^2 \; | : r$$

$$4\pi^2 = G \cdot m_S \cdot \frac{T^2}{r^3}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_S} = \text{konst!}, \text{ da } m_S = \text{konst.}$$

Beachte: Der Quotient ist jeweils nur für ein Zentralgestirn konstant.
Für ein anderes Zentralgestirn ergibt sich ein anderer Wert.

$$\rightarrow FS: \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}}$$

Anwendung: Flughöhe von Kommunikationssatelliten

An Nachrichten- und Kommunikationssatelliten stellt man meist die Forderung, dass sie sich immer <u>über demselben Bereich der Erdoberfläche</u> befinden, um permanent für die Nutzer zur Verfügung zu stehen (z.B. Satellitenfernsehen). Berechne die Flughöhe auf dieser "geostationären Bahn".

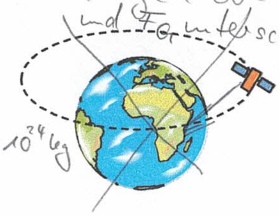
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_E}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot G \cdot m_E = r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot G \cdot m_E}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 3600\,s)^2}{4\pi^2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,kg}$$

Richtungen von F_Z und F_G unterschiedlich

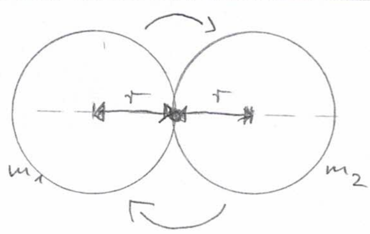


$$r = 4{,}2 \cdot 10^7\,m$$

Flughöhe: $h = r - r_E = 4{,}2 \cdot 10^7\,m - 6{,}371 \cdot 10^6\,m = 3{,}6 \cdot 10^7\,m$
$= 36 \cdot 10^3\,km$

Im Abitur 2016 tauchte eine knifflige Kräftebetrachtung zum Kometen Tschurjumow-Gerasimenko auf, die wir an dieser Stelle lösen können:
"Die Gestalt des Kometen TG kann durch zwei Kugeln vom Radius 1,4 km modelliert werden, die über ein Zwischenstück mit vernachlässigbaren Ausmaßen verbunden sind. Senkrecht auf dem Zwischenstück steht die Rotationsachse um die sich der Komet einmal in 12,4 h dreht. Es wird angenommen, dass sich die Masse 1,0 · 10¹³ kg gleich auf beide Kugeln verteilt. Durch Ausgasen des Kometen in Sonnennähe besteht die Möglichkeit, dass das Zwischenstück bricht. Untersuchen Sie auf Grundlage des obigen Modells, ob di beiden Kometenhälften dann auseinanderdriften würden."

Übungsaufgabe: Zusammenhalt eines Kometen



besser rechts unten

$$F_Z = m_1 \omega^2 r = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = 0{,}5 \cdot 10^{13}\,kg \cdot \frac{4\pi^2 \cdot 1400\,m}{(12{,}4 \cdot 3600\,s)^2}$$

$$= 1{,}39 \cdot 10^8\,N$$

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(2r)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot \frac{(0{,}5 \cdot 10^{13}\,kg)^2}{(2800\,m)^2}$$

$$= 2{,}1 \cdot 10^8\,N > F_Z$$

Gravitation hält Komet zusammen !

Selbst-Check:
- **Newton und der Apfel**
- **Bestimmung der Sonnenmasse**
- **allgemeines Keplergesetz**
- **geostationäre Bahn**

Aufgabe:

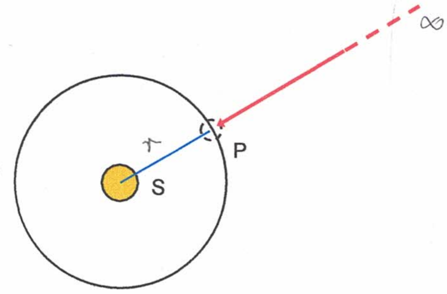
Auch eine Abituraufgabe von 2010 befasste sich mit dem Kometen Tschurj. Suchbegriff auf Leifiphysik: "rosetta mission". Damit wiederholst Du nochmal die Kepler-Gesetze und wendest das Gravitationsgesetz an.

Für die Reise zu anderen Planeten ist das Verständnis für die auftretenden Energien unumgänglich. Die potentielle Energie gewinnen wir mit dem Konzept Arbeit ist Kraft mal Weg.

2.4 Reise zu anderen Planeten

Energieformeln für die Ellipsenbahn

potentielle Energie:



Der Körper wird aus dem Unendlichen bis zum Abstand r an den Himmelskörper angenähert. Dabei integrieren wir die Arbeitsportionen F · dx $= dW$

$$W = \int_{\infty}^{r} \underbrace{F(x)\cdot dx}_{dW} = \int_{\infty}^{r} \underbrace{G\cdot m\cdot M\cdot \frac{1}{x^2}}_{\text{Gravitationsgesetz}} dx$$

$$= G\cdot m\cdot M\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]_{\infty}^{r} = G m M\left(-\frac{1}{r}+\underbrace{\frac{1}{\infty}}_{=0}\right) = \boxed{-G\cdot\frac{mM}{r} = E_{pot}}$$

Die Nennung der Gesamtenergie erfolgt ohne Herleitung. ***Leite daraus einen Term für die kinetische Energie her.***

Gesamtenergie:

$$\boxed{E_{ges} = -\frac{1}{2}G\cdot\frac{mM}{a}}$$ „–" → gebundener Zustand

kinetische Energie:

$$E_{kin} = E_{ges} - E_{pot} = -\frac{1}{2}G\frac{mM}{a} + G\frac{mM}{r}$$

$$= G m M\left(-\frac{1}{2a}+\frac{1}{r}\right) = \boxed{G m M\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right) = E_{kin}} > 0$$

da $r < 2a$

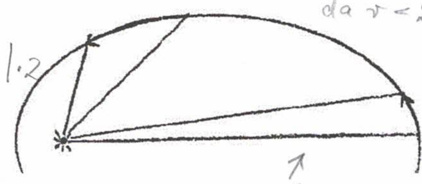
Ermittle aus der kinetischen Energie einen Term für die momentane Geschwindigkeit auf der Ellipsenbahn.

Geschwindigkeit auf der Ellipsenbahn

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m v^2 = G m M\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right) \Big| \cdot 2$$

$$v^2 = G M\cdot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\boxed{v = \sqrt{G M\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}} > 0 \text{ da } r < 2a$$



r größer → v kleiner

Aus der hergeleiteten Geschwindigkeitsformel (die findest Du auch in der Formelsammlung) lassen sich allgemeine Formeln aber auch konkrete Daten für Sonderfälle ableiten, die sich in entsprechender Form auch für andere Planeten berechnen lassen..

Bahnkurven im Gravitationsfeld

Kreisbahn: $r = a$ (halber Durchmesser)

$$v = \sqrt{G M\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{r}\right)} \rightarrow \boxed{v = \sqrt{G\cdot\frac{M}{r}}}$$

auch über $F_Z = F_G$

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$

Kreisbahn an der Erdoberfläche: (ohne Luftreibung)

$$v_1 = \sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg s^2}\cdot\frac{6{,}0\cdot 10^{24}kg}{6{,}37\cdot 10^6 m}} = 7{,}9\cdot 10^3\frac{m}{s} = \underline{\underline{7{,}9\frac{km}{s}}}$$

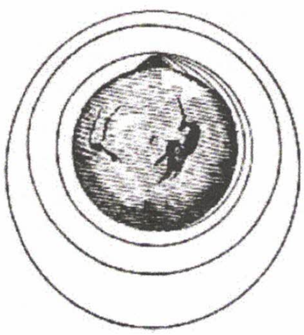
heißt „1. kosmische Geschwindigkeit"

Flucht von der Erde:

$a \rightarrow \infty$ (Ellipse wächst ins Unendliche)

$$v_2 = \sqrt{G M\left(\frac{2}{r}-\underbrace{\frac{1}{\infty}}_{=0}\right)} = \sqrt{2}\cdot v_1 = \underline{\underline{11{,}2\frac{km}{s}}}$$

heißt „2. kosmische Geschwindigkeit"



Dass sich bei verschiedenen Startgeschwindigkeiten unterschiedliche Bahnkurven ergeben, die auf immer der gleichen Gravitationswirkung beruhen, war bereits Newton klar. Das historische Bild stammt aus seinem Werk über die Dynamik.

Zuordnung der Bahnkurven:

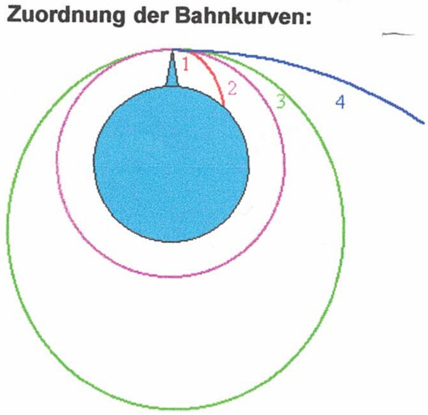


Abb. aus leifiphysik.de

$v = 0$ → senkrechter Fall

$0 < v < v_1$ → Wurfparabel (1)

$v = v_1$ → Kreis (2)

$v_1 < v < v_2$ → Ellipse (3)

$v_2 \leq v$ → Hyperbel (4)

Prinzipiell könnte man auch auf einem geradlinigen Kurs zum Mars fliegen, aber für Beschleunigen und Bremsen bräuchte man sehr viel Energie. Weitaus sparsamer geht's auf einer Ellipsenbahn, da hier die Gravitation der Sonne den Großteil der Arbeit erledigt.

a) Zeichne die Flugbahn von der Erde zum Mars.
b) Bestimme die große Halbachse der Bahn.
c) Berechne die Reisedauer von der Erde zum Mars.
d) Erläutere, weshalb der Start nur in engen Zeitfenstern möglich ist.
e) Berechne die Geschwindigkeitszunahme aus dem Erdorbit (Erdumlauf).
f) Erläutere die Einleitung des Rückfluges.

- Auf der nächsten Folie ist noch Platz zur weiteren Bearbeitung. -

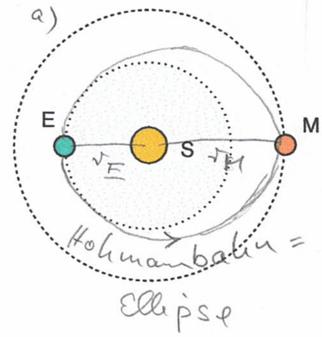
- Hier ist noch Platz für die weitere Bearbeitung des Marsfluges. -

Weitere mögliche Reiserouten findest Du im Buch S. 69 (ab 2. Auflage).

Selbst-Check:
- **Energie auf der Ellipse**
- **Bahnkurven im Gravitationsfeld**
- **Hohmann-Bahn: interplanetarer Raumflug**

Mit geringem Spritverbrauch reisen: Die Hohmann-Bahn

a)



b) $2a = r_E + r_M \rightarrow$

$a = \frac{1}{2}(r_E + r_M) = \frac{1}{2}(1\,AE + 1{,}52\,AE)$

$\underline{\underline{a = 1{,}26\,AE}}$

c) $\frac{T_H^2}{a_H^3} = \frac{T_E^2}{a_E^3}$

$T_H^2 = T_E^2 \cdot \frac{a_H^3}{a_E^3} \quad | \sqrt{\ }$

$T_H = T_E \cdot \sqrt{\left(\frac{a_H}{a_E}\right)^3} = 1a \cdot \sqrt{\left(\frac{1{,}26\,AE}{1\,AE}\right)^3} = 1{,}41\,a = \underline{516\,d}$

Reisedauer $t = \frac{1}{2} T_H = \underline{\underline{258\,d}}$ (Hinweg)

d) Erde und Mars umkreisen die Sonne mit unterschiedliche Umlaufdauern. Der Start von der Erde muss so erfolgen, dass der Mars dann an der gezeichneten Stelle angekommen sein wird, wenn auch das Raumschiff dort ankommt. Startet man zu früh oder spät, so ist der Mars 258 d später noch nicht dort oder schon wieder weg.

e) Geschwindigkeit auf Hohmannbahn:

$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} =$

$= \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}\,kg \cdot \left(\frac{2}{1{,}5 \cdot 10^{11}\,m} - \frac{1}{1{,}26 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}\,m}\right)}$

$= \underline{\underline{32{,}8\,\frac{km}{s}}}$

Geschwindigkeit der Erde:

$v_E = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r_E}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot \frac{2{,}0 \cdot 10^{30}\,kg}{1{,}5 \cdot 10^{11}\,m}}$

$= \underline{\underline{29{,}8\,\frac{km}{s}}}$

Geschwindigkeitszunahme: $\Delta v = v - v_E = 32{,}8\,\frac{km}{s} - 29{,}8\,\frac{km}{s}$

$\Delta v = 3\,\frac{km}{s} = \underline{\underline{10.800\,\frac{km}{h}}}$

f) Raumschiff wird sich im Marsorbit befinden, also mit dem Mars mitfliegen. Um wieder auf die Hohmanbahn zu gelangen, muss die Geschwindigkeit reduziert werden (Beschleunigung in Gegenrichtung)

Aufgabe:

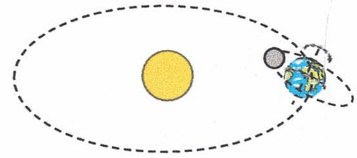
Hier passt die Abituraufgabe „Raumsonde Cassini und Saturn“ perfekt. Suchbegriff auf Leifiphysik: „cassini“.

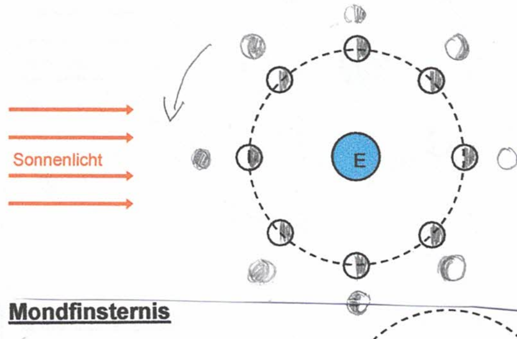
2.5 Der Erdmond

Mondphasen

Das augenfälligste Merkmal ist die Ausbildung von "Phasen", also der Wechsel der Ansicht von Vollmond über Halbmond und Mondsichel bis zu Neumond und wieder zurück. Das beruht auf dem Wechsel unserer Beobachterposition.
Markiere in jeder Mondposition den Schattenbereich und zeichne jeweils daneben, wie der Mond von der Erde aus gesehen wird.

Animation und Bilder gibt's auf Leifiphysik unter Teilgebiet Astronomie – Astronomie Einführung – Mondphasen.





Merkregel:

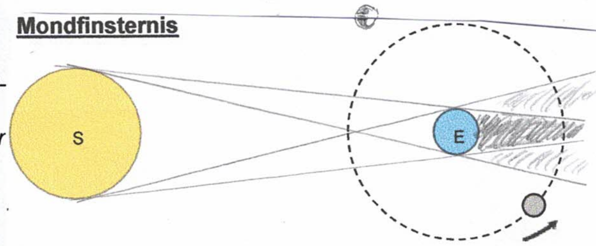
abnehmend „decrescens"

zunehmend „crescens"

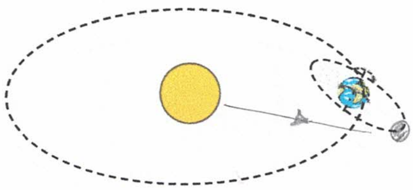
„Der Mond lügt."

Mondfinsternis

Ein spektakuläres Ereignis am Nachthimmel ist die Verdunkelung des Mondes, wenn er in den Schatten der Erde eintritt. ***Bestimme mit geeigneten Lichtstrahlen die Bereiche von Kern- und Halbschatten.***
Kann man die Finsternis überall au[f] der Erde sehen?
In welcher Phase befindet sich der Mond bei Verfinsterung? Warum gibt es nicht jeden Monat eine Mondfinsternis?
Sonnenfinsternis entsprechend.



Überall auf der Nachtseite der Erde erscheint der Mond verdunkelt (im Gegensatz zu Sonnenfinsternis).
Nur möglich bei Vollmond.



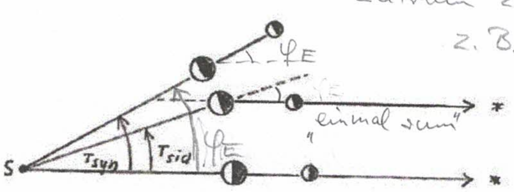
Die Bahnebenen von Erde und Mond sind gegeneinander geneigt (5°). Mond mal „tiefer", mal „höher" als die Erde

Siderische und synodische Umlaufdauer des Mondes

Die Begriffe siderisch und synodisch sind genauso definiert wie bei den Planeten. Die synodische Umlaufdauer nehmen wir beim Mond aber viel stärker war, da sie für den Wechsel der Mondphasen steht.
Vergleiche die zurückgelegten Winkel von Erde und Mond im Verlauf einer Synode und leite daraus eine Formel für den Zusammenhang von siderischer und synodischer Umlaufdauer beim Mond her.

siderische Umlaufdauer: eine volle Umrundung von oben gesehen 360°

synodische Umlaufdauer: Zeitraum zwischen zwei gleichen Aspekten, z. B. Oppositionen → Vollmonden



$$\varphi_M = \varphi_E + 2\pi$$

$$\omega_M \cdot T_{syn} = \omega_E \cdot T_{syn} + 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{T_M} \cdot T_{syn} = \frac{2\pi}{T_E} \cdot T_{syn} + 2\pi \quad | : 2\pi \quad | : T_{syn}$$

$$\frac{1}{T_M} = \frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_{syn}}$$

$T_{syn} = 29{,}53\,d$

Berechne die siderische Umlaufdauer des Mondes aus der synodischen.

$$\frac{1}{T_M} = \frac{1}{365{,}24\,d} + \frac{1}{29{,}53\,d}$$

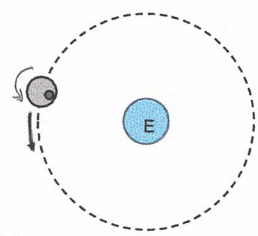
$$\rightarrow \underline{\underline{T_M = 27{,}32\,d}} = T_{sid\,Mond}$$

Gebundene Rotation

Bei der Beobachtung des Mondes stellt man fest, dass er immer gleich aussieht, obwohl er eigentlich rotiert.

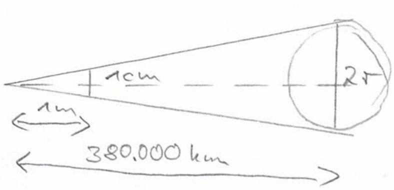

Abb. aus leifiphysik.de

Während eines Umlaufes um die Erde (27,32d) rotiert der Mond genau einmal um seine Achse und schaut deshalb immer mit derselben Seite zu uns.



Monddurchmesser

Eine Faustregel lautet: "In 1 m Abstand vom Auge beträgt der scheinbare Monddurchmesser 1 cm". Berechne daraus den Radius des Mondes (Abstand Mond-Erde im Mittel 380.000 km).



Strahlensatz:

$$\frac{2r}{1cm} = \frac{380.000\,km}{1m}$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{380 \cdot 10^6 m \cdot 0{,}01 m}{1m}$$

$$= 1{,}9 \cdot 10^6 m = \underline{\underline{1{,}9 \cdot 10^3 km}}$$

exakt 1737 km

Berechne die Masse der Erde mit den nun vorhandenen Daten (Das Prinzip findest Du im Kap. 2.3).

Tabelle: 5,974 · 10²⁴ kg

Masse der Erde

$$F_G = F_Z$$

$$G \cdot \frac{m_M \cdot m_E}{r^2} = m_M \cdot \omega^2 r$$

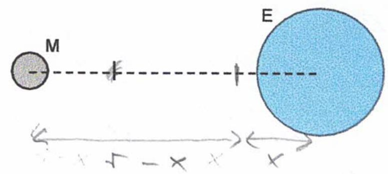
$$m_E = \omega^2 \cdot \frac{r^3}{G} = \left(\frac{2\pi}{T_{sid}}\right)^2 \cdot \frac{r^3}{G}$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot (380 \cdot 10^6 \, m)^3 \quad kg \, s^2}{(27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600 \, s)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, m^3}$$

$$= \underline{\underline{5{,}8 \cdot 10^{24} \, kg}}$$

Unsere einfache Vorstellung von einer ruhenden Erde, die vom Mond umkreist wird, trifft nicht zu. Selbst wenn man die Bewegung der Erde um die Sonne mal außer Acht lässt, ist die Sache komplizierter, da der Schwerpunkt des Systems nicht in der Mitte der Erde liegt, sondern irgendwo auf dem Weg zwischen Erde und Mond.
Berechne die Position des System-schwerpunktes mit Hilfe des Hebelgesetzes.

Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems



$$m_E \cdot x = m_M \cdot (r - x)$$

$$m_E \cdot x = m_M \cdot r - m_M \cdot x$$

$$m_E \cdot x + m_M \cdot x = m_M \cdot r$$

$$(m_E + m_M) \cdot x = m_M \cdot r$$

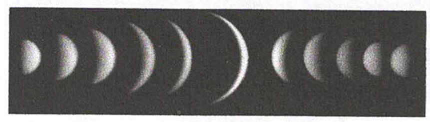
$$x = \frac{m_M \cdot r}{m_E + m_M} = \frac{7{,}3 \cdot 10^{22} \, kg \cdot 380.000 \, km}{5{,}974 \cdot 10^{24} \, kg + 7{,}3 \cdot 10^{22} \, kg}$$

$$= 4587 \, km < \text{Erdradius } R_E \; !$$

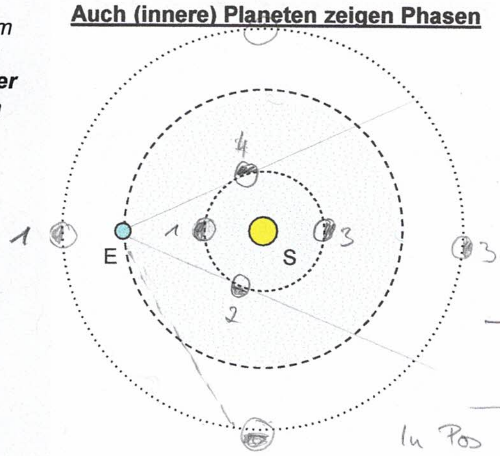
Der Schwerpunkt des Systems liegt innerhalb der Erde!

Die Ausbildung von Phasen (Sichelform) können wir vor allem bei der benachbarten Venus gut beobachten. ***Bearbeite an dieser Stelle im Buch S.28/5, die sich auf den Merkur bezieht.***

Auch (innere) Planeten zeigen Phasen



Venusphasen, Abb. von sternwarte-eberfing.de



In Pos. 1 ist Merkur dunkel („untere Konjunktion")
in Pos 2/4 sieht man ihn zur Hälfte
in Pos 3 sieht man ihn voll (obere Konj.)
→ Zeit zwischen zwei Konjunktionen ist $T_{syn, Merkur} = 3{,}8$ Mte.

Gute Beobachtung in Pos 1 (Opposition) wegen kleinem Abstand

In Pos 1 und 3 sieht man die volle Marsscheibe
in Pos 2 ist ein Teil der Marsscheibe im Schatten → Zeit zwischen zwei Maxima im Diagramm ist $\frac{1}{2} T_{syn, Mars}$!

Selbst-Check:
- **Mondphasen, Finsternisse**
- **Umlaufdauer**
- **gebundene Rotation**
- **Bestimmung der Erdmasse**
- **Schwerpunkt**
- **Phasen bei Planeten**

Aufgabe:

Hier passt eine Abituraufgabe aus 2005 zum Mond perfekt. Suchbegriff auf Leifiphysik: „mond abitur".