

Elektronenstrahlen sind Bündel von Elektronen im Vakuum oder verdünnten Gasen. Wir nutzen sie, um Elektronen zu untersuchen. Auch in der Bilderzeugung (z.B. Elektronenrastermikroskop) kommen sie zur Anwendung. Um sie ins Vakuum zu bekommen, nutzen wir den Edison-Effekt (siehe Leifiphysik Teilgebiet Elektrizitätslehre - Glühelektrischer Effekt Grundwissen).

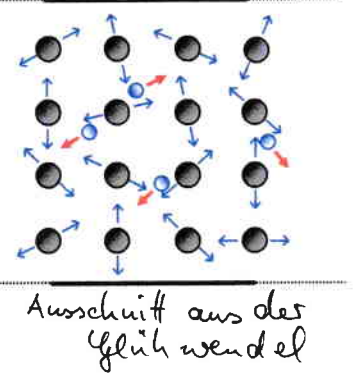
Alle unsere Elektronenröhren sind prinzipiell gleich aufgebaut. Eine Glühwendel setzt die Elektronen frei, die dann mit Hilfe eines elektrischen Längsfeldes beschleunigt werden (Beachte die Polung der Beschleunigungsspannung!). Durch ein Loch in der Anode fliegen die Elektronen dann in den Experimentierraum zur weiteren Verwendung.

2. Bewegung von Teilchen in elektrischen Feldern

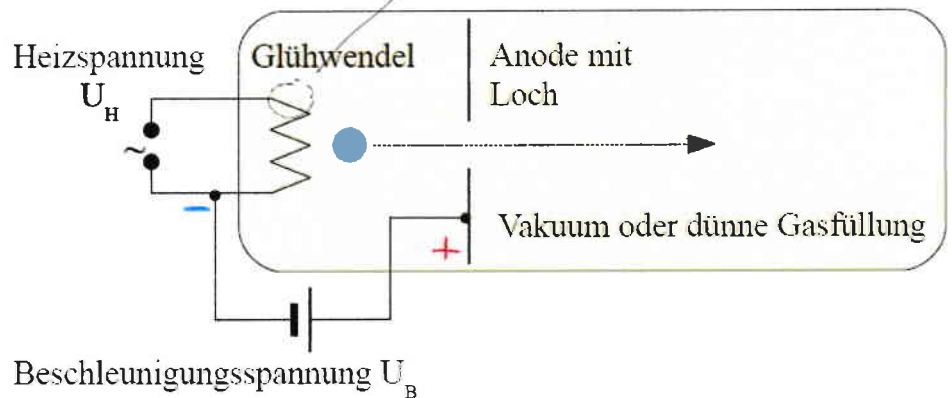
2.1 Bewegung in elektrischen Längsfeldern

Freisetzung von Elektronen

Beim Heizen bewegen sich die Atome der Glühwendel heftiger und stoßen Elektronen aus dem Gitter. Diese können sich dann frei im umgebenden Vakuum bewegen. (Edison-Effekt)



Prinzipieller Aufbau einer Elektronenröhre



12 Bewegung im elektrischen Feld 2.1 Bewegung im Längsfeld

1

In diesem Abschnitt geht es darum, was zwischen Glühwendel und Anode passiert. Die Berechnungen beruhen im Wesentlichen auf dem "Kap. 1.5 Energie und Potential im Feld". Die Zeichnung gibt diesen Bereich idealisiert als homogenes Feld wieder. **Beschaffe Dir Formeln für die Kraft, die Beschleunigung und die Geschwindigkeit des Elektrons, berechne diese für $U_B = 1,0 \text{ kV}$, $d = 2,0 \text{ cm}$, m und e aus FS/TR.**

Beschleunigung der Elektronen im homogenen Längsfeld

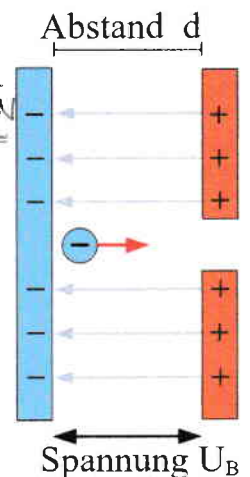
$$E = \frac{F}{q} \rightarrow F = E \cdot q \quad \text{und} \quad E = \frac{U_B}{d}$$

$$F = \frac{U_B}{d} \cdot q = \frac{1000 \text{ V}}{0,02 \text{ m}} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} = 8,0 \cdot 10^{-15} \text{ N}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{8,0 \cdot 10^{-15} \text{ N}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 8,8 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v^2 = 2ax = 2ad \quad | \sqrt{}$$

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2 \cdot 8,8 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,02 \text{ m}} = 1,9 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



kinetische Energie der Elektronen

$$W = q \cdot U$$

$$E_{\text{kin}} = W = q \cdot U = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1000 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ J} = (1,0 \text{ keV})$$

Die Einheit eV ("Elektronvolt")

entsprechend für $U_B = 1,0 \text{ V} \rightarrow E_{\text{kin}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1,0 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Diese Energiemenge nennt man 1,0 eV ("Elektronvolt"), weil sie sich aus der Multiplikation von 1e und 1,0 V ergibt

Die Geschwindigkeit lässt sich wie meist mit dem Energiekonzept wesentlich leichter berechnen. Hierzu musst Du wieder den Begriff "Potential" hervorkramen. **Gib eine Formel für die Arbeit im homogenen Feld an und bestimme die kinetische Energie eines Elektrons, das mit 1,0 kV beschleunigt wurde.**

12 Bewegung im elektrischen Feld 2.1 Bewegung im Längsfeld

2

Leite aus dem letzten Abschnitt eine Formel für die Berechnung der Endgeschwindigkeit her und berechne diese für die Beschleunigungsspannung 1,0 kV. Diskutiere den Einfluss der Beschleunigungsstrecke d.

Endgeschwindigkeit der Elektronen (Formel)

$$E_{kin} = W$$

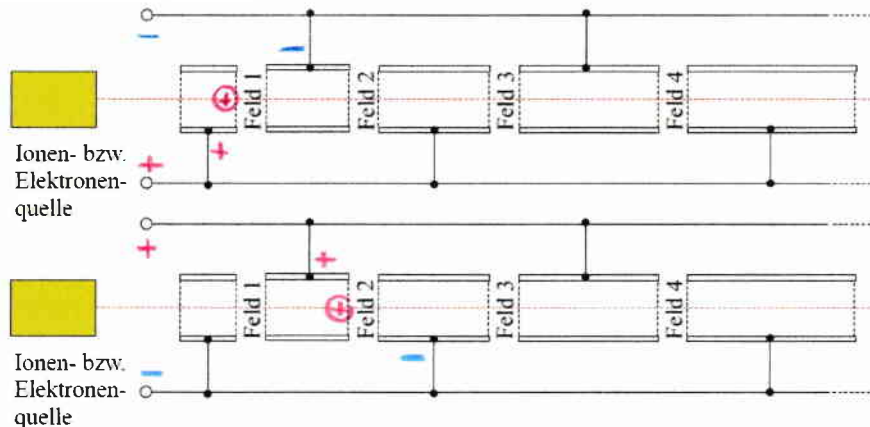
$$\frac{1}{2} m v^2 = q \cdot U_B \rightarrow v^2 = \frac{2q \cdot U_B}{m} \quad | \sqrt{}$$

Die Endgeschwindigkeit eines geladenen Teilchens in einem Längsfeld mit der Beschleunigungsspannung U_B lässt sich berechnen als:

$$v = \sqrt{2 \cdot U_B \cdot \frac{q}{m}} \quad \text{mit Ladung } q \text{ und Masse } m \text{ des Teilchens}$$

Insbesondere für schwerere Teilchen (Ionen) wurden mehrstufige Beschleuniger entwickelt, einer der einfachsten ist der Linearbeschleuniger. Mit der abgebildeten Vorrichtung werden Protonen beschleunigt. Diese verlassen die Ionenquelle mit einer Anfangs-Geschwindigkeit v_0 und durchlaufen dann mehrere Röhren hintereinander (Abb. zeigt ein Schnittbild). Am Zwischenraum zwischen zwei Röhren werden sie jeweils durch ein Feld beschleunigt. Trage in die erste Zeichnung die Polung für Feld 1 ein, in die zweite Zeichnung die Polung für Feld 2. Erläutere die Art der Spannung, die man an der gesamten Anordnung anlegt.

Linearbeschleuniger



Während das Proton durch die 2. Röhre fliegt, muss umgepolt werden \rightarrow Wechselspannung!

12 Bewegung im elektrischen Feld 2.1 Bewegung im Längsfeld

Eine Animation zum Linearbeschleuniger gibt's auf Leifiphysik unter Teilgebiet Elektrizitätslehre - Bewegte Ladungen in Feldern - Ausblick - Hochfrequenz Linearbeschleuniger.

a) In der Zeichnung werden die Röhren immer länger. Begründe die Notwendigkeit dieser Bauweise.

b) Die Protonen treten mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 6,0 \cdot 10^6$ m/s ein, der Scheitelwert der Spannung beträgt 500 kV. Berechne die Gesamtenergie und Geschwindigkeit in der 4. Röhre.

c) Berechne die passende Länge der 4. Röhre, wenn die Frequenz $f = 40$ MHz beträgt.

Aufgabe: Linearbeschleuniger

a) In jedem Feld werden die Teilchen beschleunigt, also schneller. Bei gleichbleibender Frequenz bewegen sie sich innerhalb einer halben Periodendauer (Polwechsel) also immer weiter.

$$b) E_{kin,0} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (6,0 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 3,0 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

$$\Delta E_{kin} = 3 \cdot q \cdot U_B = 3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 5,0 \cdot 10^5 \text{ V} = 2,4 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$E_{kin} = E_{kin,0} + \Delta E_{kin} = 0,3 \cdot 10^{-13} \text{ J} + 2,4 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 2,7 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_{kin}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 E_{kin}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,7 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 1,8 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Spannung muss am Ende der 4. Röhre umgepolt sein $\rightarrow t = \frac{T}{2}$

$$l = v \cdot t = v \cdot \frac{T}{2} = v \cdot \frac{1}{2f} = 1,8 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{2 \cdot 40 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}} =$$

$$= 0,22 \text{ m} = 22 \text{ cm}$$

Selbst-Check:

- Edison-Effekt
- Funktionsprinzip von Elektronenröhren
- Beschleunigung und Geschw. im Längsfeld
- Linearbeschleuniger

Übungsmöglichkeiten:

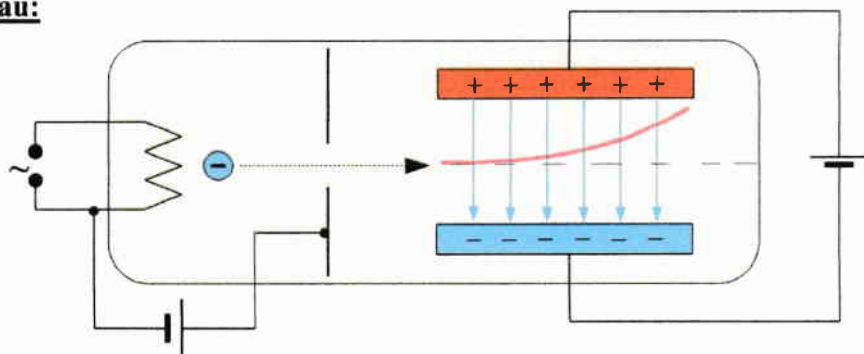
Auf Leifiphysik eignen sich unter Teilgebiet Elektrizitätslehre - Bewegte Ladungen in Feldern - Geladene Teilchen im elektrischen Längsfeld Aufgaben z.B. die alte Abituraufgabe "Linearbeschleuniger (1988)" sowie die Aufgabe "Teilchen im Längsfeld" (das Quiz passt hier noch nicht!).

In den freien Experimentier-
raum (siehe Kap. 2.1) wird
nun ein Plattenkondensator
eingebaut. Das System zur
Strahlerzeugung ist identisch
zum letzten Kapitel. **Zeichne
den weiteren Strahlverlauf
ein. Beschreibe den Einfluss
der verwendeten Spannun-
gen auf den Strahlverlauf.**
Eine Simulation hierzu gibt's
auf Leifiphysik unter
**Teilgebiet Elektrizitätslehre -
Bewegte Ladungen und
Felder - Elektronenablenk-
röhre Grundwissen.**

Nun stellen wir den Strahl so
ein, dass er den Plattenkondensator
am Ende in einem
bestimmten Abstand von der
Einschussachse verlässt und
nehmen die Experimentier-
daten auf. Die Geometrie des
Kondensators ist fest
vorgegeben. **Berechne aus
der Beschleunigungs-
spannung die Einschuss-
geschwindigkeit (Kap. 2.1).**

2.2 Bewegung in elektrischen Querfeldern

Aufbau:



Beschleunigungsspannung U_B

Ablenkspannung U_A

- je größer die Ablenkspannung, desto größer die Ablenkung
(desto stärker die Krümmung der Bahnkurve)
- je größer die Beschleunigungsspannung, desto kleiner die Ablenkung
(desto flacher der Strahl)

Experimentelle Daten:

Beschleunigungsspannung $U_B = 3,0 \text{ kV}$, Ablenkspannung $U_A = \dots 1,3 \text{ kV} \dots$

Plattenabstand $d = 5,4 \text{ cm}$, Plattenlänge $l = 10 \text{ cm}$, Ablenkung $y_1 = \dots 2 \text{ cm} \dots$

Berechnung der Einschussgeschwindigkeit v_0 :

$$v = \sqrt{2 U_B \cdot \frac{q}{m}} = \sqrt{2 \cdot 3000 \text{ V} \cdot \frac{1,76 \cdot 10^{-14} \text{ C}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 3,25 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

spezif. Ladung des Elektrons

12 Bewegungen im elektrischen Feld 2.2 Bewegung im Querfeld

1

Die Berechnung der Flugbahn
erfolgt getrennt in x- und y-
Richtung (Unabhängigkeit der
Bewegungen), so wie wir das in
der 10. Jahrgangsstufe beim
waagrechten Wurf gemacht
haben.

a) Beschreibe die Bewegun-gen
in x- und y- Richtung.

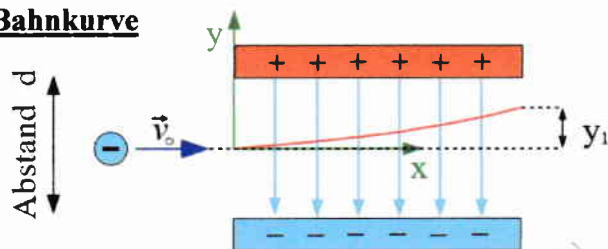
b) Berechne die Beschleuni-
gung a , die in y-Richtung auf
das Elektron im Kondensator
aufgrund der Ablenkspannung
 U_A wirkt.

c) Leite aus den ersten beiden
Schritten die Bahnkurve $y(x)$
her. (Tipp: Fasse die beiden
Gleichungen zusammen, in-
dem Du die Zeit t eliminiertst)

d) Ermittle einen Term für die
Ablenkung y_1 am Kondensator-
ende.

✱ Berechne y_1 für die Daten
aus unserem Experiment und
vergleiche mit dem Messwert.

Berechnung der Bahnkurve



- a) waagrecht: (I) $x(t) = v_0 \cdot t$ (konst. Geschwindigkeit)
senkrecht: (II) $y(t) = \frac{1}{2} a t^2$ (beschleunigte Bewegung)

$$b) a = \frac{F}{m} = \frac{E \cdot q}{m} = \frac{U_A \cdot q}{d \cdot m}$$

$$c) \text{ aus (I) } \rightarrow t = \frac{x}{v_0}$$

$$\text{ in (II) } \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{x^2}{v_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_A \cdot q}{d \cdot m} \cdot \frac{1}{v_0^2} \cdot x^2$$

→ Flugbahn ist Parabel

$$d) y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_A \cdot q}{d \cdot m} \cdot \frac{1}{v_0^2} \cdot l^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1300 \text{ V}}{0,054 \text{ m}} \cdot 1,76 \cdot 10^{-14} \frac{\text{C}}{\text{kg}} \cdot \frac{1}{(3,25 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} \cdot (0,1 \text{ m})^2$$

$$= 2,0 \text{ cm} \quad \text{wie im Experiment}$$

Wir ersetzen nun den Term v_0^2 in der Formel für die Bahnkurve mit Hilfe der Formel für die Endgeschwindigkeit (siehe Kap. 2.1). Dadurch erhalten wir eine allgemeinere Form, in der alle Daten des Experiments vorkommen.

- a) Erläutere den Zusammenhang dieser Formel mit den auf Folie 1 beschriebenen Abhängigkeiten zwischen dem Bahnverlauf und den verwendeten Spannungen.
b) Erläutere die Bedeutung der Feldstärke im Plattenkondensator für diese Formel.

Eine klassische Anwendung ist das Oszilloskop zur Darstellung zeitlich veränderlicher Spannungen. Der Strahl erzeugt auf dem Bildschirm (4) einen Lichtpunkt. Durch U_x (intern) lässt man den Lichtpunkt ständig waagrecht über den Schirm laufen. Die zu messende Spannung wird als U_y an das waagrecht Plattenpaar angelegt. Erläutere die Funktion des Gerätes.

In der Darstellung des Oszilloskops ist gut zu erkennen, dass die Elektronen nach dem zweiten Kondensator geradlinig weiterfliegen, bevor sie auf den Schirm treffen. Um diesen Teil der Flugbahn zu beschreiben benötigt man die Richtung der Flugbahn beim Austritt, in der Zeichnung ist hierzu der Geschwindigkeitspfeil dargestellt.

- a) Zerlege den Pfeil in waagrechte und senkrechte Geschw.-komponente.
b) Gib die Gleichungen für $v_x(t)$ und $v_y(t)$ an.
c) Bestimme einen Term für die Flugdauer im Kondensator und eliminiere damit t in b).
d) Ermittle einen Term für den Ablenkwinkel α und berechne ihn für die exp. Daten.

Verallgemeinerte Formel für die Bahnkurve

$$\text{Bahn: } y = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_A}{d} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{1}{v_0^2} \cdot x^2 \quad \text{mit: } v_0 = \sqrt{2 \cdot U_B \cdot \frac{q}{m}} \rightarrow v_0^2 = 2 \cdot U_B \cdot \frac{q}{m} \rightarrow \frac{1}{v_0^2} = \frac{m}{2 \cdot U_B \cdot q}$$

$$\text{zusammen: } y = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_A}{d} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{m}{2 \cdot U_B \cdot q} \cdot x^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{U_A}{U_B} \cdot \frac{1}{d} \cdot x^2$$

Ein Elektronenstrahl, der ein homogenes Querfeld (Kondensator)

durchläuft, beschreibt eine Parabel, die nur von der

Beschleunigungsspannung und der Ablenkspannung

abhängt, nicht aber von der Ladung und der Masse des Elektrons.

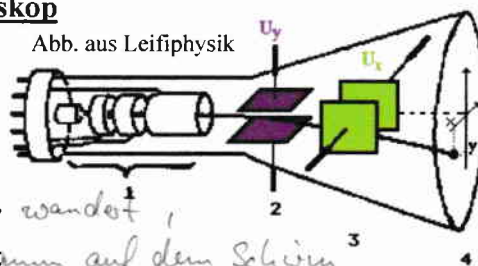
$$y(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{U_A}{U_B} \cdot \frac{1}{d} \cdot x^2$$

- U_A größer $\rightarrow y$ größer, U_B größer $\rightarrow y$ kleiner (wie auf Folie 1)
- in der Formel steht $\frac{U_A}{d} = E$ darin, Feldstärke macht Ablenkung y

Technische Anwendung: Oszilloskop

- je größer die Spannung U_y , desto größer die Ablenkung auf dem Schirm
- da Lichtpunkt nach rechts wandert, entsteht ein t - U -Diagramm auf dem Schirm

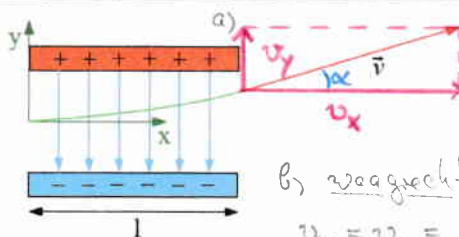
Abb. aus Leifiphysik



12 Bewegungen im elektrischen Feld 2.2 Bewegung im Querfeld

3

Aufgabe: Richtung des Strahls beim Austritt aus dem Kondensator



b) waagrecht konst. Geschwindigkeit
 $v_x = v_0 = \frac{l}{t} \rightarrow t = \frac{l}{v_0}$

senkrecht beschleunigte Bewegung

$$v_y = a \cdot t = \frac{U_A \cdot q}{d \cdot m} \cdot \frac{l}{v_0} \quad c)$$

$$d) \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{U_A \cdot q}{d \cdot m} \cdot \frac{l}{v_0^2} = \frac{1300 \text{ V}}{0,054 \text{ m}} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{(3,75 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} = 0,40$$

$$\rightarrow \alpha = 22^\circ$$

Selbst-Check:

- Ablenkung im Querfeld
- Bewegung in x- und y-Richtung
- Bahnkurve im Querfeld
- Ablenkwinkel

Übungsmöglichkeiten:

Auf Leifiphysik eignen sich unter Teilgebiet Elektrizitätslehre - Bewegte Ladungen in Feldern - Geladene Teilchen im elektrischen Querfeld Aufgaben bzw. - Elektronenstrahlableitungen Aufgaben die beiden Quiz sowie die Aufgaben zu "Ionen im Querfeld" und "Elektronen im Querfeld".

12 Bewegungen im elektrischen Feld 2.2 Bewegung im Querfeld

4

Die Physiker Kaufmann und Bucherer führten in den Jahren 1901 bis 1910 Experimente zur spezifischen Ladung von schnellen Elektronen durch. Sie verwendeten dazu ein Massenspektrometer, das wir später in Kap. 3.5 kennenlernen. Als Quelle für die Elektronen verwendeten sie einen β -Strahler.

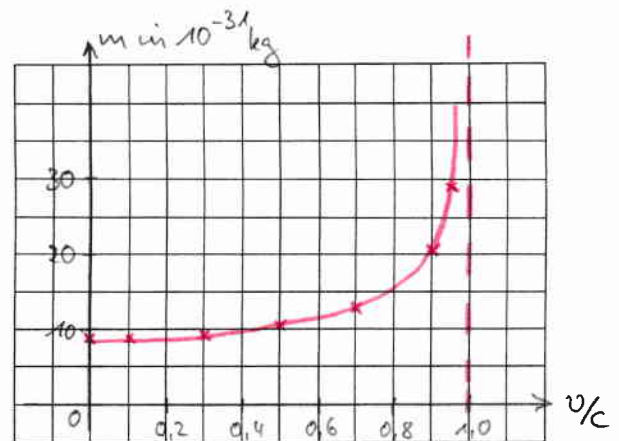
Berechne aus der spezifischen Ladung jeweils die Masse der Elektronen und stelle die Werte in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ($v/c = \text{Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit}$) dar.

Diese Beobachtung lies sich erklären durch die zunächst noch umstrittene Relativitätstheorie, die Einstein 1905 veröffentlicht hatte. Dort hatte er den nebenstehenden Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Masse von Teilchen postuliert (gefordert). Der Umrechnungsfaktor von m_0 zu m heißt **Lorentzfaktor**.

2.3 Relativistische Energie

Relativistische Massenzunahme bei hohen Geschwindigkeiten:

v/c	e/m in 10^{11} C/kg	m in 10^{-31} kg
0	1,76	9,1
0,1	1,75	9,1
0,3	1,68	9,5
0,5	1,52	10,5
0,7	1,26	12,6
0,9	0,77	20,8
0,95	0,55	29,1



Die Masse eines Teilchens nimmt mit seiner Geschwindigkeit zu. Der Effekt wird aber erst bei hohen Geschwindigkeiten ($v > 0,1 c$) erkennbar. Der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Masse wird beschrieben durch die Formel:

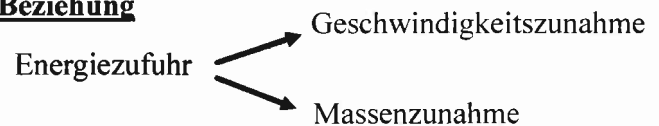
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

m_0 = Ruhemasse des Teilchens
 c = Lichtgeschwindigkeit

Beim Beschleunigen nimmt also nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die Masse eines Körpers zu. Für diese Massenzunahme wird ein Teil der zugeführten Energie verwendet. Mit unserer bisher beliebten Formel $E_{\text{kin}} = 1/2 m \cdot v^2$ können wir bei hohen Geschwindigkeiten deshalb nicht mehr rechnen, neue Rechentechniken werden nötig. Diese Formel ist wohl die berühmteste in der Physik überhaupt. Die Äquivalenz von Masse und Energie zählt zu den Grundaussagen der Relativitätstheorie und liefert die wissenschaftliche Basis für das Prinzip der Kernfusion.

Berechne die Ruheenergie einer Person (70 kg) und vergleiche mit der Energiemenge, die ein Westeuropäer pro Jahr verwendet (ca. 30 MWh).

Energie - Masse - Beziehung



Die Massenzunahme (also auch die Masse selbst) entspricht damit einer Energiemenge. Einstein postulierte dafür eine einfache Proportionalität: $E \sim m$. Der Proportionalitätsfaktor dafür ist gerade das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit, also $E = c^2 \cdot m$.

Einer Masse m entspricht die Gesamtenergie $E = mc^2$. Sie wird für deren Erzeugung benötigt, bei deren Vernichtung wird sie frei.

Ruheenergie

Jedes Teilchen (jeder Körper) besitzt so allein aufgrund seiner Masse bereits eine Energie, auch wenn er sich nicht bewegt. Diese wird als Ruheenergie E_0 bezeichnet und lässt sich mit dieser Formel berechnen.

$$E = mc^2 = 70 \text{ kg} \cdot \left(3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 6,3 \cdot 10^{18} \text{ Ws}$$

$$= \frac{1,75 \cdot 10^{15} \text{ Wh}}{3600} = 1,75 \cdot 10^9 \text{ MWh}$$

Durch Auflösung dieser Masse in Energie könnte man den Jahresenergiebedarf von $1,75 \cdot 10^9 : 30 = 58 \text{ Mio}$ Menschen decken.

Die kinetische Energie eines Teilchens wird nun (anders als in der Mittelstufe) als Differenz seiner Gesamtenergie und seiner Ruheenergie berechnet. In der folgenden Aufgabe kannst Du dieses neue Verfahren gleich mal ausprobieren:

Berechne die kinetische Energie eines Elektrons, das sich mit 90% der Lichtgeschwindigkeit bewegt.

Kinetische Energie

Die Gesamtenergie eines Körpers setzt sich zusammen aus der Ruheenergie und der kinetischen Energie, also $E = E_0 + E_{kin}$, damit:

$$E_{kin} = E - E_0$$

wobei $E = m \cdot c^2$ und

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Bewegte Masse:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{\sqrt{1 - (0,9)^2}} = \underline{\underline{2,09 \cdot 10^{-30} \text{ kg}}}$$

Gesamtenergie:

$$E = mc^2 = 2,09 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot \left(3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 1,88 \cdot 10^{-13} \text{ Js}$$

$$= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad 1,17 \cdot 10^6 \text{ eV} = \underline{\underline{1,174 \text{ MeV}}}$$

Ruheenergie:

$$E_0 = m_0 c^2 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 8,18 \cdot 10^{-14} \text{ Js}$$

$$= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad \underline{\underline{511 \text{ keV}}}$$

kinetische Energie:

$$E_{kin} = E - E_0 = 1174 \text{ keV} - 511 \text{ keV} = \underline{\underline{663 \text{ keV}}}$$

Bei Erzeugung von Teilchenstrahlen ist die kinetische Energie in der Regel bekannt, da sie sich aus der Beschleunigungsspannung ergibt. Oft muss man dann aus der kinetischen Energie die Geschwindigkeit berechnen. Diese Aufgabe zeigt das Vorgehen dabei.

Berechne die Geschwindigkeit eines Elektrons mit der kinetischen Energie 1000 keV. Gehe wie folgt vor:

1. Berechne die Gesamtenergie.
2. Berechne die Masse.
3. Die Geschwindigkeit berechnen wir, nachdem wir die Ergebnisse aus 1. und 2. verglichen haben.

Das war schon etwas knifflig, vor allem im dritten Schritt. In dieser Aufgabe stecken aber alle üblichen Aufgabenstellungen.

Training: Rechnen mit relativistischen Energien

1) Gesamtenergie:

$$E = E_0 + E_{kin} = 511 \text{ keV} + 1000 \text{ keV} = \underline{\underline{1511 \text{ keV}}}$$

2) Masse:

$$E = mc^2 \rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{1511 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}{\left(3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \underline{\underline{2,69 \cdot 10^{-30} \text{ kg}}}$$

3) Geschwindigkeit:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{m_0}{m} \rightarrow 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2$$

$$\rightarrow 1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{26,9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}\right)^2} = \underline{\underline{0,94}}$$

$$v = 0,94c = 0,94 \cdot 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{2,8 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Selbst-Check:

- Massenzunahme bei hoher Geschwindigkeit
- Einsteinformel
- Ruheenergie, Gesamtenergie, kin. Energie

Übungsmöglichkeiten:

Auf Leifiphysik eignet sich unter **Teilgebiet Relativitätstheorie - Spezielle Relativitätstheorie - Relativistische Energie Aufgaben** insbesondere die Aufgabe "Kinetische Energie von Elektronen" und „Geschwindigkeit aus Energie“.

Die Größe "Impuls", die wir aus der Mittelstufe kennen, taucht auch in der relativistischen Dynamik auf. Die Formel sieht einfacher aus, als sie hier ist, da m keine Konstante ist, sondern sich mit der Geschwindigkeit ändert. Anhand einer konkreten Aufgabe lernen wir in dieser Stunde den Umgang mit dem "relativistischen Impuls".

Aufgabe:

In einem Experiment misst man für schnelle Elektronen den Impuls $8,0 \cdot 10^{-22} \text{ kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) Berechne zunächst nicht-relativistisch die Geschwindigkeit.

b) Erläutere, weshalb dieses Ergebnis im Widerspruch zu den Grundpostulaten der speziellen Relativitätstheorie steht.

2.4 Relativistischer Impuls

Definition:

Genau wie in der klassischen Mechanik ist der Impuls p definiert durch

$$p = m \cdot v$$

Allerdings ist hier die Masse m abhängig von der Geschwindigkeit!

Aufgabe:

a) $p = m \cdot v$

$$v = \frac{p}{m} = \frac{8,0 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = \underline{\underline{8,8 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

b) Die berechnete Geschwindigkeit ist größer als die Lichtgeschwindigkeit ($3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$).

Eines der Grundpostulate der speziellen Relativitätstheorie lautet, dass die Lichtgeschwindigkeit die größtmögliche Geschwindigkeit ist. \downarrow

c) Berechne die Geschwindigkeit nun korrekt mit relativistischer Rechnung, verwende den Lorentzfaktor.

Aufgabe (Fortsetzung):

c) $m v = p$

$$\frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = p \quad |^2$$

$$\frac{m_0^2 v^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = p^2 \quad | \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

$$m_0^2 v^2 = p^2 - p^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad | + p^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$m_0^2 v^2 + \frac{p^2}{c^2} v^2 = p^2$$

$$v^2 \left(m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}\right) = p^2$$

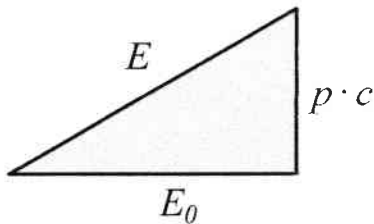
$$v^2 = \frac{p^2}{m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}} \quad | \sqrt{}$$

$$v = \frac{p}{\sqrt{m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}}}$$

$$v = \frac{8,0 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{(9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})^2 + \frac{(8,0 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{(3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}}} = \underline{\underline{2,84 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Auch wenn Energie und Impuls unterschiedliche Größen sind, so verbindet sie doch, dass bei beiden in die Berechnung die Masse und die Geschwindigkeit der Teilchen einfließen. Deshalb gibt es auch einen Zusammenhang zwischen Energie und Impuls, das ist in der klassischen Dynamik genauso der Fall, wie in der relativistischen. Für den letzteren Fall ist dieser Zusammenhang hier hergeleitet.

Arbeite diese Herleitung durch und vollziehe dabei jeden einzelnen Schritt nach. (oft wird dieser algebraische Zusammenhang anhand eines rechtwinkligen Dreiecks dargestellt, da er formal dem Pythagoras entspricht)



Energie - Impuls - Beziehung

$$(1) \quad E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \left| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right.$$

$$E \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = E_0 \quad |^2$$

$$E^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = E_0^2 \quad (2)$$

$$(3) \quad p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\frac{(3)}{(1)}: \quad \frac{p}{E} = \frac{m_0 v}{m_0 c^2} = \frac{v}{c^2} \rightarrow v = \frac{p}{E} \cdot c^2 \quad (4)$$

$$E^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{p}{E} \cdot c\right)^2\right) = E_0^2$$

$$E^2 - p^2 c^2 = E_0^2$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

12 Bewegung im elektrischen Feld 2.4 Relativistischer Impuls

3

Mit der Energie-Impuls-Beziehung können wir jetzt die Masse der Elektronen aus der Aufgabe vom Anfang berechnen.
d) Berechne für die Elektronen aus der Aufgabe von Folie 1 und 2 die Masse mit Hilfe der Energie-Impuls-Beziehung.
e) Führe alternativ die Berechnung der Masse mit Hilfe der Formel aus Kapitel 2.3 durch und vergleiche die beiden Ergebnisse.

Fortsetzung der Aufgabe von Folie 1 und 2

$$d) \quad E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

$$(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + p^2 c^2$$

$$m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \quad | : c^4$$

$$m^2 = m_0^2 + \frac{p^2}{c^2} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$m = \sqrt{m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}}$$

$$= \sqrt{(9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})^2 + \frac{(8,0 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{(3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}} = 2,82 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

$$e) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2,84 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2}} = 2,82 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

Auf den ersten Blick erscheint die Verwendung der Energie-Impuls-Beziehung unnötig aufwendig, sie kommt aber ohne die Berechnung der Geschwindigkeit auf Folie 2 aus.

Übungsmöglichkeiten:

Selbst-Check:

- relativistischer Impuls (Definition)
- Energie-Impuls-Beziehung
- Berechnungen

Auf Leifiphysik eignet sich unter Teilgebiet Relativitätstheorie - Spezielle Relativitätstheorie - Relativistische Masse und Impuls Aufgaben insbesondere die Aufgabe "Impuls und Geschwindigkeit von Elektronen im B-Feld (Teilaufgaben b) und c)", sowie unter - Energie-Impuls-Beziehung Aufgaben die Aufgabe "Hochenergetische Teilchen (Teilaufgabe c)". Achtung: viele Aufgaben aus diesem Bereich kommen erst zu einem späteren Zeitpunkt in Frage.