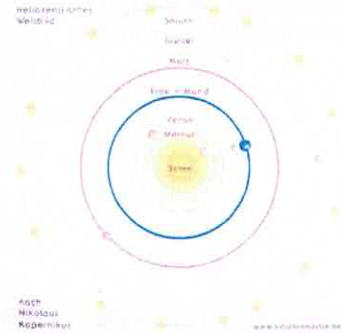
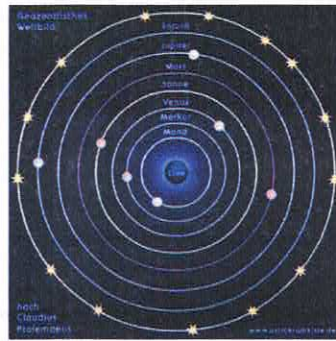


2.1 Der Wandel des astronomischen Weltbilds im Laufe der Zeit

Als astronomische Weltbilder sind das geozentrische und das heliozentrische die zwei bekanntesten.

Ordne die folgenden Aussagen auch mit Hilfe der Bilder dem geozentrischen oder dem heliozentrischen Weltbild zu.



Aussage	Geozentrisches Weltbild	Heliozentrisches Weltbild
Die Erde ist das Zentrum des Universums.	×	
Die Planeten bewegen sich um die Sonne.		×
Die Erde selbst bewegt sich nicht auf einer kreisförmigen Bahn, sondern ruht.	×	
Alle Planeten bewegen sich ausschließlich um die Erde.	×	
Die Sonne ist das Zentrum unseres Sonnensystems.		×
Die Erde kreist um die Sonne und um sich selbst.		×
Eine Fixsternsphäre bildet den äußeren Abschluss.	×	×
Der Mond ist nahe dem Zentrum.	×	
Der Merkur ist nahe dem Zentrum.		×

2.1 Der Wandel des astronomischen Weltbilds im Lauf der Zeit

Auf der Basis der genaueren Daten von Tycho Brahe gelang Johannes Kepler der entscheidende Schritt zur mathematischen Beschreibung der Planetenbahnen: die Abkehr vom der "göttlichen" Kreisform und die Nutzung der Ellipse.

Alle drei Keplersetze sind auf den Leifseiten animiert unter Teilgebiet Astronomie – Planetensystem.

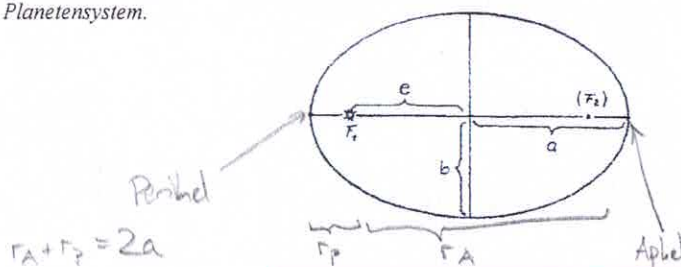
2.2 Die Kepler-Gesetze

1. Keplersches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne. Dabei steht die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse.



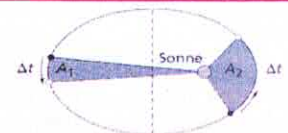
Exkurs: Geometrie der Ellipsen



- a: große Halbachse (= mittlerer Abstand)
- b: kleine Halbachse
- F₁ und F₂: Brennpunkte
- e: lineare Exzentrizität
(e = 0: Kreis)

2. Keplersches Gesetz

Der Fahrstrahl Sonne-Planet überstreicht in gleiche Zeiten gleiche Flächen.



Beachte:

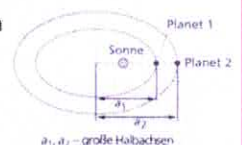
Die Gesetze gelten jeweils für alle Körper, die dasselbe Zentralgestirn (z.B. die Sonne) umrunden, also auch Raumsonden oder Kometen. Bei der Umrundung eines anderen Gestirns (z.B. Satelliten um die Erde) ergibt sich ein anderer Wert.

3. Keplersches Gesetz

Die Quadrat der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen der

Ellipsen:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \text{konst.}$$



Typisch misst man die Umlaufdauer eines Planeten und berechnet daraus den Abstand zur Sonne zu berechnen. Für Saturn misst man eine Umlaufdauer von 29,5 a. Berechne daraus den mittleren Abstand zur Sonne (= Länge der großen Halbachse).

Basic: Berechnung von Planetenbahnen

Beachte:

Die Längeneinheit bei dieser Berechnung ist 1 AE (Astronomische Einheit). Dabei entspricht 1 AE genau dem Abstand Erde - Sonne.

$$\frac{a_s^3}{a_E^3} = \frac{T_s^2}{T_E^2} \Rightarrow a_s = \sqrt[3]{\frac{T_s^2}{T_E^2} \cdot a_E^3} = a_E \cdot \sqrt[3]{\frac{T_s^2}{T_E^2}} = 1 \text{ AE} \cdot \sqrt[3]{\frac{(29,5 \text{ a})^2}{(1 \text{ a})^2}} = 9,5 \text{ AE}$$

Der Maler Giotto stellte 1306 nach einer Beobachtung dieses Kometen die typische Kometenform in seinem berühmten Bild "Anbetung der Könige" dar.

Halley umläuft die Sonne auf einer stark elliptischen Bahn mit einer Umlaufdauer von 76,1 a und erreicht dabei einen maximalen Abstand von der Sonne von 35,4 AE.

a) Berechne die große Halbachse seiner Bahn.

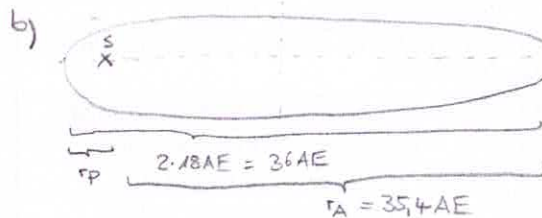
b) Skizziere seine Bahn.

c) Berechne den kleinsten Abstand von der Sonne.

d) Beurteile unter Berücksichtigung der Ergebnisse, ob Halley eine Gefahr für die Erde darstellen könnte.

Musteraufgabe: Komet Halley

$$a) \frac{a_H^3}{a_E^3} = \frac{T_H^2}{T_E^2} \Rightarrow a_H = a_E \cdot \sqrt[3]{\frac{T_H^2}{T_E^2}} = 1 \text{ AE} \cdot \sqrt[3]{\frac{(76,1 \text{ a})^2}{(1 \text{ a})^2}} = 18 \text{ AE}$$



$$c) r_p = 36 \text{ AE} - 35,4 \text{ AE} = 0,6 \text{ AE}$$

d) Im Perihel ist Halley näher an der Sonne als die Erde (1 AE)
 \Rightarrow Kreuzung mit Erde möglich
2.2 Kepler-Gesetze
 \Rightarrow Kollision möglich



a) Die Skizze stellt die Bahn der Erde um die Sonne dar. Dabei sind verschiedene Stellungen der Erde eingetragen.

Vergleiche die Geschwindigkeiten der Erde in den Punkten am 21. Juni und am 21. Dezember und erläutere, wie sich die unterschiedlichen Bahngeschwindigkeiten der Erde auf die Jahreszeiten auswirkt.

b) Ein Satellit umkreist die Erde in 500 km Höhe. Der $a_M = 384000 \text{ km}$ entfernte Mond läuft in $T_M = 27,3$ Tagen um die Erde (Erdradius $r_E = 6370 \text{ km}$).

Berechnen Sie die Umlaufdauer T des Satelliten.

c) Die Umlaufzeit der internationalen Raumstation ISS um die Erde beträgt etwa 92 min.

Berechnen Sie die Höhe, in welcher Höhe sich die Raumstation über der Erdoberfläche etwa bewegt und berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit der ISS.

Training:

a) Im Juni ist die Bahngeschwindigkeit kleiner als im Dezember (Flächensatz). Dadurch ist der Winter kürzer als der Sommer.



$$b) \frac{a_s^3}{a_M^3} = \frac{T_s^2}{T_M^2} \Rightarrow T_s = T_M \cdot \sqrt[3]{\frac{a_s^3}{a_M^3}} = 27,3 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} \cdot \sqrt[3]{\frac{(6870 \text{ km})^3}{(384000 \text{ km})^3}} = 14 \text{ min}$$

$$c) \frac{a_{ISS}^3}{a_M^3} = \frac{T_{ISS}^2}{T_M^2} \Rightarrow a_{ISS} = a_M \cdot \sqrt[3]{\frac{T_{ISS}^2}{T_M^2}} = 384000 \text{ km} \cdot \sqrt[3]{\frac{(92 \text{ min})^2}{(27,3 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min})^2}} = 6769 \text{ km}$$

$$h_{ISS} = 6769 \text{ km} - 6370 = 399 \text{ km}$$

Annahme Kreisbahn: $v_{ISS} = \frac{U}{t} = \frac{2 \cdot a_{ISS} \cdot \pi}{92 \text{ min}} \approx 28000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Aufgaben:

Auf Leifphysik findet man zu diesem Thema einen schwierigen Test sowie ein paar Aufgaben unter Teilgebiet Mechanik - Weltbilder, Keplersche Gesetze - Aufgaben. Die einfachen (grünen) reichen dabei vollkommen aus.

Selbst-Check:

- Ellipsenbahn
- Flächensatz
- Abstandsberechnung
- Astronomische Einheit

Es ist ganz typisch für die Naturwissenschaft, dass Phänomene zuerst beschrieben und später erklärt werden. Erst ca. 1600 gelang Galilei die korrekte Beschreibung von Wurfbewegungen, bis zu deren Erklärung dauerte es weitere 70 Jahre.

2.3 Gravitationsgesetz

Entwicklung der Mechanik

Kinematik:

..... mathematische Beschreibung von Bewegungsbahnen
 auf der Erde: Parabelbahn beim Wurf (Galilei)
 am Himmel: Ellipsenbahn von Planeten (Kepler)

Dynamik:

..... physikalische Begründung von Bewegungsbahnen
 auf der Erde: 3 Gesetze der Bewegung (Newton)
 am Himmel: 3 Gesetze + Gravitationsgesetz (Newton)

Newton und der Apfel

Dass Newton die zündende Idee hatte, als ihm ein Apfel auf den Kopf fiel, gehört wohl ins Reich der Legende. Die Anekdote zeigt aber genau den Knackpunkt dieser Entwicklung: **Newton wendet seine Gesetze für irdische Bewegungen auf die Himmelsmechanik an.**



aus dem Wechselwirkungsprinzip folgt Newton, dass der Apfel die Erde ebenso anzieht wie die Erde den Apfel, das überträgt er auf das System Erde-Mond bzw. Sonne-Erde



Newton's Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

m : Massen

r : Abstand der Mittelpunkte

G : universelle Gravitationskonstante $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$

Zunächst probieren wir die Formel gleich mal in einem naheliegenden Beispiel aus:

Bestimme die Gravitationskraft auf eine Person ($m = 50 \text{ kg}$) auf der Erdoberfläche und vergleiche.

Anwendung: Erdanziehung auf eine Person auf der Oberfläche

$$\vec{F}_G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot \frac{50 \text{ kg} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,371 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 493 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 493 \text{ N}$$

früher: $\vec{F}_G = m \cdot g = 50 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 491 \text{ N} < \rightarrow \text{gleich}$

Bestimmung der Sonnenmasse

In ihrer Grundform werden wir diese Formel nur selten benutzen, da die Massen der Himmelskörper zunächst mal nicht bekannt sind. Im Umkehrschluss ermöglicht uns die Formel aber gerade diese unbekannten Massen zu bestimmen.

Bestimme die Masse unserer Sonne aus dem Erdumlauf.

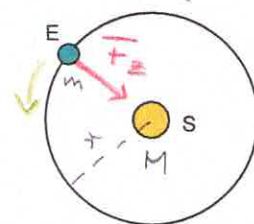
$$\vec{F}_Z = \vec{F}_G$$

$$m_E \omega^2 r = G \cdot \frac{m_E \cdot m_S}{r^2} \quad \text{unabhängig von Erdmasse!}$$

$$m_S = \frac{\omega^2 r^3}{G}$$

$$m_S = \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^3}{G} = \frac{4\pi^2 \cdot (1,49 \cdot 10^{11} \text{ m})^3}{(365,24 \cdot 3600 \text{ s})^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2}$$

$$= 1,97 \cdot 10^{30} = m_S$$



Um die Masse eines Himmelskörpers zu bestimmen, benötigen wir einen

..... zweiten Körper, der den ersten umkreist. Aus der Gleichheit von Zentripetalkraft und Gravitationskraft ergibt sich die **Massen des Zentralgestirns**, die Masse des zweiten Körpers, fliegt bei der Rechnung raus.

Beachte: Dieses Konzept gilt in der vereinfachten Betrachtung, dass das Zentralgestirn quasi ruht, während der zweite Körper umläuft. Sofern der zweite Körper viel leichter ist, geht das näherungsweise in Ordnung.

Nachdem Kepler mit seinen Gesetzen "nur" die Bewegung der Planeten beschrieben hatte, gelang es Newton, das dritte Kepler-Gesetz physikalisch zu begründen.

Ermittle aus der Kräftebetrachtung des vorherigen Beispiels eine andere Darstellung des Terms T^2/r^3 aus dem dritten Kepler-Gesetz.

Newton und Kepler: Das allgemeine Kepler-Gesetz

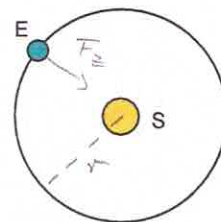
$$F_Z = F_G$$

$$m_E \omega^2 r = G \cdot \frac{m_E \cdot m_S}{r^2} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = G \cdot \frac{m_S}{r^2} \quad | \cdot T^2 | : r$$

$$4\pi^2 = G \cdot m_S \cdot \frac{T^2}{r^3}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_S} = \text{konst!}, \text{ da } m_S = \text{konst.}$$



Beachte: Der Quotient ist jeweils nur für ein Zentralgestirn konstant. Für ein anderes Zentralgestirn ergibt sich ein anderer Wert.

$$\rightarrow F_S: \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

Anwendung: Flughöhe von Kommunikationssatelliten

An Nachrichten- und Kommunikationssatelliten stellt man meist die Forderung, dass sie sich immer über demselben Bereich der Erdoberfläche befinden, um permanent für die Nutzer zur Verfügung zu stehen (z.B. Satellitenfernsehen). Berechne die Flughöhe auf dieser "geostationären Bahn".

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_E}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot G \cdot m_E = r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot G \cdot m_E}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 3600 \text{ s})^2}{4\pi^2} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}$$

$$r = 4,2 \cdot 10^7 \text{ m}$$

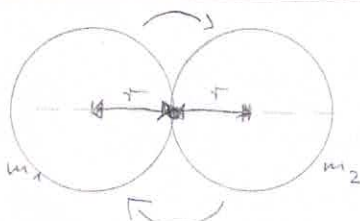
$$\text{Flughöhe: } h = r - r_E = 4,2 \cdot 10^7 \text{ m} - 6,371 \cdot 10^6 \text{ m} = 3,6 \cdot 10^7 \text{ m} = 36 \cdot 10^3 \text{ km}$$



Im Abitur 2016 tauchte eine knifflige Kräftebetrachtung zum Kometen Tschurjumow-Gerasimenko auf, die wir an dieser Stelle lösen können:

"Die Gestalt des Kometen TG kann durch zwei Kugeln vom Radius 1,4 km modelliert werden, die über ein Zwischenstück mit vernachlässigbaren Ausmaßen verbunden sind. Senkrecht auf dem Zwischenstück steht die Rotationsachse um die sich der Komet einmal in 12,4 h dreht. Es wird angenommen, dass sich die Masse $1,0 \cdot 10^{13} \text{ kg}$ gleich auf beide Kugeln verteilt. Durch Ausgasen des Kometen in Sonnennähe besteht die Möglichkeit, dass das Zwischenstück bricht. Untersuchen Sie auf Grundlage des obigen Modells, ob die beiden Kometenhälften dann auseinanderdriften würden."

Übungsaufgabe: Zusammenhalt eines Kometen



besser rechts unten



$$F_Z = m_1 \omega^2 r = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = 0,5 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \frac{4\pi^2 \cdot 1400 \text{ m}}{(12,4 \cdot 3600 \text{ s})^2}$$

$$= 1,39 \cdot 10^8 \text{ N}$$

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(2r)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot \frac{(0,5 \cdot 10^{13} \text{ kg})^2}{(2800 \text{ m})^2}$$

$$= 2,1 \cdot 10^8 \text{ N} > F_Z$$

Gravitation hält Komet zusammen!

Selbst-Check:

- Newton und der Apfel
- Bestimmung der Sonnenmasse
- allgemeines Keplersgesetz
- geostationäre Bahn

Aufgabe:

Auf Leifphysik findet man hierzu zwei Tests sowie einige Aufgaben unter Teilgebiet Mechanik - Gravitationsgesetz und -feld - Gravitationsgesetz von Newton - Aufgaben. Die leichten (grünen) reichen völlig aus.